

Programme de colle n°26

semaine du 4 au 8 mai

Notions vues en cours

Chapitre 33 : Déterminants (suite de la semaine précédente)

- Déterminant d'une famille de vecteurs (u_1, \dots, u_n) dans une base \mathcal{B} , notation $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- Formules $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, caractérisation d'une base par le déterminant (en dimension finie)
- Déterminant d'une matrice carrée, formules pour les déterminant de taille 3 ou moins (règle de Sarrus)
- $\det(A^{\top}) = \det A$, le déterminant est une forme n -linéaire alternée (donc antisymétrique) en les colonnes / les lignes de la matrice et conséquences directes (si les colonnes / lignes forment une famille liée, le déterminant est nul, etc.)
- Opérations élémentaires sur le déterminant : les permutations changent de signe, les dilatactions font apparaître un facteur hors du déterminant
- Mineur (noté Δ_{ij}), cofacteur, développement selon une ligne / colonne, déterminant d'une matrice triangulaire
- Déterminant d'un endomorphisme : définition, notation $\det f$, formule $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, formules pour $\det(\lambda f)$, $\det(f \circ g)$, $\det(f^{-1})$, formules équivalentes pour les matrices
- Le déterminant d'un endomorphisme correspond à celui de sa matrice selon toute base, deux matrices semblables ont le même déterminant
- Comatrice : définition, notation $\text{Com}(A)$, formule $A \text{Com}(A)^{\top} = \text{Com}(A)^{\top} A = \det(A) I_n$, si A est inversible, expression de A^{-1} en fonction de $\text{Com}(A)$
- Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ssi $B \in \text{Im}(A)$, il y a unicité (sans forcément existence) ssi $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$
- Système de Cramer ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A est inversible), existence et unicité de la solution d'un système de Cramer, la solution est $X = A^{-1}B$, formules de Cramer
- Sous-matrice de taille r d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, mineur de taille r , le rang de A vaut r ssi il existe au moins un mineur de taille r non nul et si tous les mineurs de taille $r+1$ sont nuls.

La question de cours diffère de d'habitude cette semaine, mais les exercices porteront sur le chapitre 33 (déterminants).

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Questions Flash. Préparation au concours blanc : pour chaque étudiant, 8 questions Flash seront posées sur les chapitres **1 à 32**. Parmi les 8 questions, 2 d'entre elles porteront sur les chapitres **30 à 32**.

Question Longue. Pas de question longue cette semaine. Les 8 questions Flash font office de question Longue, y compris en termes de barème.

Questions Flash au programme :

Chapitre 32 : (les notations sont sous-entendues)

- Qu'appelle-t-on une permutation d'un ensemble E ? Donner un exemple classique de permutation de E .
- Soit $\sigma = (2 \ 5 \ 4)(4 \ 1 \ 5)$ un élément de S_5 . Compléter : $\sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$
- Définir le support d'une permutation σ . Que peut-on dire de deux cycles dont les supports sont disjoints ?
- Quel est le résultat de décomposition de σ en lien avec les cycles ? Est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?
- Quel est le résultat de décomposition de σ en lien avec les transpositions ? Est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?
- Soit $\sigma = (a_1 \ \cdots \ a_p)$ un cycle. Donner la formule qui décompose ce cycle en produit de transpositions.
- Soit $\sigma \in S_n$. À quelle condition est-ce que σ est une permutation impaire ? Que vaut alors sa signature ?
- Quel sont les ensembles de départ et d'arrivée de l'application signature ε ? Que peut-on dire de plus sur ε par rapport à ces deux ensembles ?

Chapitre 31 : (les notations sont sous-entendues)

- Donner la taille de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Donner la taille de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$ et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Donner la formule qui exprime la matrice de $f(x)$ en fonction des matrices de f et de x . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ les bases de E, F .
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Donner la formule qui exprime la matrice de $g \circ f$ en fonction des matrices de f et de g . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ les bases de E, F, G .
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Donner la formule qui exprime la matrice de f^{-1} en fonction de la matrice de f . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ les bases de E, F .
- Donner la taille de la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Donner la formule de changement de bases qui donne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.
- Donner la formule de changement de bases qui donne $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble de départ, d'arrivée et l'expression du morphisme f_A canoniquement associé à A .
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?

- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont semblables, que peut-on dire de leurs traces ? Est-ce une équivalence ?
- Que peut-on dire de la trace de $A + B$? et de la trace de AB ?

Chapitre 30 : (on suppose que E et F sont des \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$)

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G . Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(u)$ pour $u \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G . Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p .
- Compléter ces phrases : “Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ...” et “Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ...”
- Soit s une symétrie par rapport à un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G . Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $s(u)$ pour $u \in E$?
- Soit E un \mathbb{K} -e.v. Que signifie l’assertion “ f est une forme linéaire sur E ” ?
- Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Que signifie “ (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base duale de (e_1, \dots, e_n) ” ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E , si E est de dimension quelconque ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E , si E est de dimension n ? Quelle est la dimension de E^* ?
- Soit $H_1 = \text{Ker } \varphi_1$ et $H_2 = \text{Ker } \varphi_2$ sont deux hyperplans, à quelle condition sur φ_1 et φ_2 a-t-on $H_1 = H_2$?
- Soit E un \mathbb{K} -e.v. Donner une caractérisation de l’assertion “ H est un hyperplan” qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 29 : (on suppose que E et F sont des \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$)

- Compléter : une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si :
- Donner les définitions ensemblistes de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
- À quelles conditions sur $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ est-ce que f est injective ? surjective ?
- Comment trouver une famille génératrice de $\text{Im } f$ à partir d’une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ?
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Si E et F sont de même dimension finie, que peut-on dire si f est injective ?
- Que signifie que E et F sont des espaces isomorphes ? Si $\dim E = n$, quels sont les espaces isomorphes à E ?
- Soit u_1, \dots, u_n des vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$? de $\text{rg } f$?
- Si E est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Si F est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Que peut-on dire du rang de $g \circ f$ en fonction des rangs de f et de g ?
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 28 : (on suppose que E est un \mathbb{K} -e.v.)

- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sur-famille d’une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sous-famille d’une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Énoncer les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.

- À quelle condition est-ce qu'un ensemble E est dit de dimension finie ? Comment définit-on alors la dimension de E , c'est-à-dire l'entier $\dim E$?
- Donner la dimension de l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et écrire trois matrices issues de sa base canonique.
- Donner la dimension de \mathbb{K}^n et écrire trois vecteurs issus de sa base canonique. De plus, quelle est la dimension de $E \times F$?
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre de E ? On attend deux propriétés.
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice de E ? On attend deux propriétés.
- On suppose E de dimension finie et F un s.e.v. de E . Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ? On attend deux propriétés.
- Soit F, G deux s.e.v. de E . Que doit vérifier une base \mathcal{B} pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Énoncer la formule de Grassman pour deux s.e.v. F et G . Que devient cette formule si F et G sont en somme directe ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E . Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 27 (on suppose que E est un \mathbb{K} -e.v.) :

- Donner cinq \mathbb{K} -e.v. usuels (rappel : la liste est $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^\Omega, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}(X), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
- Soit $F \subset E$. Donner une caractérisation de " F est un s.e.v. de E ".
- Donner la définition en termes d'ensemble de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- Soit A une partie de E . Compléter : $\text{Vect}(A)$ est le plus de E qui A et $\text{Vect}(A) = A$ ssi
- Donner la définition de " (u_1, \dots, u_n) est une famille génératrice de E ".
- Donner la définition de " (u_1, \dots, u_n) est une famille libre". Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Donner la définition de " (u_1, \dots, u_n) est une famille liée".
- Donner la définition de " u et v sont colinéaires". Que peut-on alors en déduire sur la famille (u, v) ?
- Que signifie la notation $F \oplus G$? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .
- Que signifie " F et G sont supplémentaires" ? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .

Chapitre 24 :

- Rappeler le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Quels sont les polynômes irréductibles sur \mathbb{C} ? et sur \mathbb{R} ?
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Qu'appelle-t-on un polynôme scindé sur \mathbb{K} ? et scindé à racines simples ?
- En termes de racines, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P \wedge Q = 1$
- Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, dont on note α, β, γ les racines complexes. Donner les relations coefficients-racines.
- Quelle structure algébrique possède l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que doit-on vérifier pour que F soit irréductible ?

- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que vaut $\deg(F)$? Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$? et d'une racine ?
- Donner la forme de la DES sur $\mathbb{R}(X)$ ou sur $\mathbb{C}(X)$ pour une fraction rationnelle donnée par l'examinateur (*le dénominateur étant déjà factorisé ou facile à factoriser, et la division euclidienne n'étant pas nécessaire*).

Chapitre 23 :

- Rappeler la définition de "P et Q sont associés"
- Si $B \mid A$ dans quel cas peut-on dire que $\deg B \leq \deg A$? Que peut-on dire de plus si $\deg B = \deg A$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Rappeler la relation de Bézout (ou théorème de Bézout-Bachet) pour des polynômes
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Que peut-on dire des polynômes AB et $(A \vee B)(A \wedge B)$?
- Compléter : α est une racine de P ssi divise P
- Donner deux caractérisations de "α est racine de multiplicité exactement m" : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Donner deux caractérisations de "α est racine de multiplicité au moins m" : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Quel lien existe-t-il entre le degré d'un polynôme et son nombre de racines (comptées avec multiplicité) ?

Chapitre 22 :

- Écrire la forme développée (avec un signe \sum) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P + Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Que peut-on dire du degré de $P \circ Q$ si Q est constant ? et si Q est non constant ?
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} (\dots) X^k$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P

Chapitre 20 :

- Soit A, B des matrices de tailles respectives (n, p) et (p, q) . Rappeler la formule qui exprime $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B .
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit E^{ij} et E^{kl} deux matrices élémentaires. Compléter la formule : $E^{ij}E^{kl} = \delta_{..} E^{\dots}$
- Quelle structure algébrique peut-on mettre sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Donner la forme (avec des 0, des *...) d'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Idem pour les matrices triangulaires supérieures et inférieures.
- Si A et B sont diagonales, que peut-on dire de AB ? peut-on dire la même chose pour des matrices triangulaires ?
- Rappeler la formule du binôme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ainsi que la formule $A^m - B^m$.
- Que *suffit-il* de vérifier pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible ?

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est la taille de A^\top ? Exprimer $[A^\top]_{ij}$ en fonction des coefficients de A .
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.

Chapitre 19 :

- Soit \top une l.c.i. sur E et $e \in E$. Que doit vérifier e pour être un élément neutre pour \top ?
- Soit \top une l.c.i. sur E et $x \in E$. Que doit vérifier x pour être symétrisable pour \top ?
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérifier pour que (G, \top) soit un groupe.
- Soit (G, \cdot) un groupe et $H \subset G$. Donner une caractérisation de “ H est un sous-groupe de G ”.
- Soit (G, \top) et (G', \perp) deux groupes et $f : G \rightarrow G'$. Que doit vérifier f pour être un morphisme ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de f . À quelle condition sur le noyau est-ce que f est injective ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation de l'image de f . À quelle condition sur l'image est-ce que f est surjective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de “ B est un sous-anneau de A ”
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \rightarrow A'$ pour être un morphisme d'anneaux ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\text{Inv}(A)$) ?
- Que doit vérifier un anneau $(A, +, \times)$ pour être un anneau intègre ?
- Que doit-on vérifier pour que $(\mathbb{K}, +, \times)$ soit un corps ?

Chapitre 18 :

- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, que peut-on dire sur a et b ?
- Rappeler le théorème de division euclidienne dans \mathbb{Z} (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le théorème de Bézout.
- Si $a \mid bc$, peut-on dire que $a \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, peut-on dire que $a \wedge (bc) = 1$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \mid c$ et $b \mid c$, peut-on dire que $ab \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que signifie “ a est inversible modulo n ” ? Sous quelle condition est-ce que cela est vérifié ?
- Donner une relation simple qui fait intervenir $a \wedge b$ et $a \vee b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer le lemme d'Euclide.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier n sous forme de facteurs premiers.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler une définition de la valuation $v_p(n)$ (deux définitions sont acceptées, cf 18.47).
- Donner une condition nécessaire et suffisante à $a \mid b$, qui fait intervenir les valuations $v_p(a)$ et $v_p(b)$. Et pour $a = b$?
- Compléter les formules suivantes : $v_p(ab) = \dots$ et $v_p(a \wedge b) = \dots$
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Chapitre 17 :

- Soit E un ensemble. Que doit vérifier \mathcal{R} pour être une relation d'équivalence sur E ?
- Soit $x \in E$ et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Donner la définition de la classe d'équivalence de x .
- Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Si $x\mathcal{R}y$, que peut-on dire des classes d'équivalence de x et y ?
- Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E avec trois classes d'équivalences distinctes A, B, C . Que peut-on dire sur A, B et C ?
- Soit E un ensemble. Que doit vérifier \mathcal{R} pour être une relation d'ordre sur E ?
- Soit \preceq une relation d'ordre sur E . Que doit vérifier \preceq pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit \preceq une relation d'ordre sur E et $A \subset E$. Que doit vérifier A pour être bornée ?
- Soit \preceq une relation d'ordre sur E et $A \subset E$. Que doit vérifier M pour être le maximum de A pour \preceq ?

Chapitre 16 :

- Donner la définition d'une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l'inégalité de Jensen pour une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l'inégalité des pentes pour une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Que peut-on dire de la position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à une sécante ? On pourra faire un dessin et répondre oralement.

Chapitre 15 :

- À quelle condition f est-elle dérivable à droite en a et que vaut alors $f'_d(a)$?
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a , peut-on dire que f est dérivable en a ?
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Donner une ou des conditions nécessaires qui permettent de déduire qu'un point a est un point critique de f .
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Donner la définition de fonction lipschitzienne.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Que doit vérifier f pour être une fonction de classe \mathcal{C}^n ? et de classe \mathcal{C}^∞ .
- Soit g, h deux fonctions \mathcal{C}^n . Énoncer la formule de Leibniz pour la fonction $f = gh$.

Chapitre 14 :

- Donner la définition de " $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ " en termes de quantificateurs pour a et ℓ finis.
- Des variantes de la question précédente où a et/ou ℓ peuvent être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.
- Donner les quatre formes indéterminées qui font intervenir les opérations somme, produit et quotient.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction f , pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point a .
- Est-ce qu'une fonction qui admet une limite à gauche et à droite en un point qui sont égales admet nécessairement une limite en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.

- Donner la définition de “ f est continue en a ” en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Est-ce qu’une fonction qui est continue à gauche et à droite en un point est nécessairement continue en ce point ? Si c’est faux, tracer un contre-exemple.
- Soit $a \in D$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction f définie sur $D \setminus \{a\}$ au point a ? Que vaut alors $f(a)$?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (*celui qui traite de l’injectivité, indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !*).
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Énoncer le corollaire du théorème des bornes atteintes (*celui qui dit que l’image de tout segment par une fonction continue (...), indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !*).

Chapitre 13 :

- Donner la définition de “ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée” ainsi que “ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante”
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \rightarrow \ell$ en termes de quantificateurs.
- Que signifie l’assertion “ (u_n) est convergente” ? et “ (u_n) est divergente” ?
- Donner la définition de $u_n \rightarrow +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Soit (u_n) une suite croissante. Que doit-elle vérifier pour être convergente ? et divergente ?
- Donner la définition de “ (u_n) et (v_n) sont adjacentes” puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Que doit vérifier l’application φ pour que $(u_{\varphi(n)})$ soit une suite extraite de (u_n) ?
- Donner la définition de “ ℓ est une valeur d’adhérence de (u_n) ”.
- On suppose que $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell'$. Que peut-on dire si $\ell \neq \ell'$? et si $\ell = \ell'$?
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass et le démontrer

Chapitre 12 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase “ \mathbb{R} possède la propriété de la borne supérieure” ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure “avec des ε ” : $m = \inf A \iff \dots$
- Compléter la caractérisation de la borne supérieure avec des suites : $M = \sup A \iff \dots$
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de l’écriture “ $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ”
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de “ D est dense dans \mathbb{R} ” (deux assertions possibles, une seule suffit).
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de “ D est dense dans \mathbb{R} ” en termes de suites.

Chapitre 10 :

- Donner une primitive de $\frac{u'}{u}$. En déduire une primitive de $\frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\operatorname{sh} x \times \frac{1}{\operatorname{ch}^n x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\cos x \sqrt{\sin x}$.
- Donner une primitive de $u'(ax+b)$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $\tan(2x+3)$.
- Si F est une primitive d’une fonction f sur un intervalle I , quelles sont toutes les primitives de f sur I ?

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Donner la définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
- Soit $a \geq 0$. Que peut-on dire de $\int_{-a}^a f$ si f est impaire ? et si f est paire ?

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème de la bijection monotone. On pourra en faire tout ou partie oralement...
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer x^y avec des fonctions usuelles. Pour quelles valeurs de x et de y est-ce que cela a un sens ?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de arcsin ? et de arccos ?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on arcsin(sin x) = x ? Et sin(arcsin x) = x ?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on arccos(cos x) = x ? Et cos(arccos x) = x ?
- Donner les dérivées de arccos x et de arctan x .
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de arctan ? et de th ?
- Donner deux expressions de la dérivée de th x .

Chapitre 8 :

- Soit f, g deux fonctions de D dans \mathbb{R} . Que signifie $f \leq g$?
- Soit f et g deux fonctions dont on note D_f et D_g les ensembles de définitions. Que doit vérifier un réel x pour que $(g \circ f)(x)$ ait un sens ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est croissante" et de " f est strictement décroissante"
- Si f est croissante et g est décroissante, quelle est la monotonie de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux décroissantes ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est majorée"
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une caractérisation en termes de quantificateurs de " f est bornée"
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f admet un minimum en a "
- Donner la définition de " f est continue en a "
- Donner la définition de " f est dérivable en a "
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l'examineur)

Chapitre 7 :

- Soit $A \subset E$. Donner la définition de l'application indicatrice sur A .
- Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$. Compléter : $x \in f^{-1}(B) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. Compléter : $y \in f(A) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \rightarrow F$. Donner la définition de " f est injective" en termes de quantificateurs.
- Idem que ci-dessus, ou bien avec " f est surjective", ou bien avec " f est bijective".
- Soit $f : E \rightarrow F$. Si f est injective, que peut-on dire de l'équation (Eq _{y}) : $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$?
- Idem que ci-dessus, ou bien avec " f est surjective", ou bien avec " f est bijective".
- Compléter les formules : $(f^{-1})^{-1} = \dots$ et $(g \circ f)^{-1} = \dots$
- Rappeler la définition d'une similitude directe.

Chapitre 6 :

- Soit z et z' deux complexes et λ un réel. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\operatorname{Re}(z+z') = \dots \quad \operatorname{Im}(zz') = \dots \quad \operatorname{Re}(\lambda z) = \dots \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = \dots$$

- Compléter les formules suivantes : $z + \bar{z} = \dots$ et $z - \bar{z} = \dots$
- Compléter l'identité remarquable suivante : $|u+v|^2 = \dots$
- À quelle condition sur u et v a-t-on $|u+v| = |u| + |v|$?
- Donner les deux formules d'Euler.
- À quelle condition est-ce qu'un complexe z admet une forme trigonométrique ? Donner cette forme en précisant dans quels ensembles appartiennent chaque nouvelle variable.
- Mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme a et/ou de la forme ib avec a et b deux réels choisis par l'examinateur.
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Combien de racines carrées possède un nombre complexe ω ? Si z est une de ces racines, que peut-on dire ?
- On considère le polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Que vaut la somme de ses racines ? et le produit ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n -ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire e^z sous forme trigonométrique.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. À quelle condition sur $\arg(z)$ a-t-on $z \in \mathbb{R}_+^*$? et $z \in \mathbb{R}^*$?

Chapitre 5 :

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une formule à compléter parmi les formules de changement de quadran, d'addition, de duplication, au choix de l'examinateur.
- Compléter : $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter : $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter : $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

Chapitre 4 :

- Compléter les formules $\sum_{k=1}^n k = \dots$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule $a^n - b^n = \dots$
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Donner la définition de $\binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = \dots$
- Compléter : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

Chapitre 3 :

- Compléter : $\forall a \in \dots \sqrt{a^2} = \dots$ et $\forall a \in \dots \sqrt{a^2} = \dots$
- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.

- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $a^2 \leq b^2$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$?
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x+y \rfloor = \dots \quad \lfloor x+k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

Chapitre 2 :

- Quels sont les éléments de $\llbracket -4, 2 \rrbracket$? Et de $[-4, 2]$?
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$, que peut-on dire de a et de b ?
- Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, 2\})$, i.e. l'ensemble des parties de $\{1, 2\}$.
- Quelle est la caractérisation de $x \in A \cap B$? de $x \in A \cup B$?
- Compléter les formules suivantes : $\overline{A \cap B} = \dots$ et $\overline{A \cup B} = \dots$
- Sous quelle condition est-ce que des ensembles A_1, \dots, A_n sont-ils disjoints deux à deux ?
- Compléter : les ensembles A_1, \dots, A_n forment une partition de E si A_1, \dots, A_n sont , disjoints deux à deux et si

Chapitre 1 :

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " $P \implies Q$ ".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " P ou Q ".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de " n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation de l'assertion suivante : ... (au choix de l'examineur).
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion " $P \implies Q$ " ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- Même question que ci-dessus pour la récurrence forte.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ?